Cursul 8 Oscilaţii: Oscilaţii amortizate

8.1. Oscilaţii amortizate

În orice problemă reală intervin însă forţe de rezistenţă din partea mediului, din partea legaturilor, care conduc la o disipare în timp a energiei sistemului fapt care conduce la amortizarea oscilaţiilor. Să consideram un corp care se mişcă cu viteza relativ mică într-un mediu vâscos. Forţa de frecare este proporţională cu viteza acestuia:

$$\vec{F}_f = -r \cdot \vec{v} = -r \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = -r \cdot \dot{\vec{x}} . \tag{1}$$

Ecuaţia de mişcare a punctului material:

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x - r \cdot \dot{x} . \tag{2}$$

Introducând notaţiile:

$$2\delta = \frac{r}{m} \quad \text{şi} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} , \tag{3}$$

de unde ecuaţia de mişcare este:

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 , \tag{4}$$

care este o ecuaţie diferenţială, omogenă, de gradul al doilea cu coeficienţi constanţi. Ecuaţia caracteristică este:

$$\lambda^2 + 2\delta \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0 , \tag{5}$$

care are soluţia:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} , \tag{6}$$

de unde soluţia generală a ecuaţiei (4) este:

$$\begin{gathered} x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-\delta t + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\delta t - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \\ x(t) = e^{-\delta t} \left[C_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right] \end{gathered} . \tag{7}$$

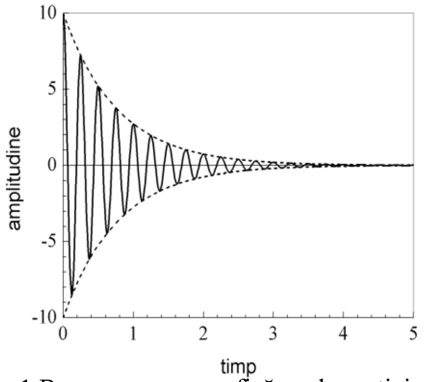

Fig. 1 Reprezentarea grafică a elongaţiei din ecuaţia 11 în funcţie de timp. Amplitudinea este şi ea o funcţie de timp data de 5-40.

Dacă forţa de frecare este foarte mare $\delta > \omega_0$ atunci constantele λ_1 şi λ_2 sunt reale, şi nu se mai produce nici o mişcare oscilatorie, amplitudinea scăzând exponenţial în timp. Dacă forţa de frecare este mai mică $\delta < \omega_0$ soluţiile sunt mărimi complexe, iar în acest caz mişcarea este periodică. Dacă notam:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,, \tag{8}$$

atunci ecuaţia de mişcare devine:

$$x(t) = e^{-\delta t}\left[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right], \tag{9}$$

care poate fi rescrisă folosindu-se funcţiile armonice, *sinus* şi *cosinus*:

$$x(t) = e^{-\delta t}\left[(C_1 + C_2)\cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega t)\right], \tag{10}$$

sau trecând sub forma cunoscută:

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{11}$$

unde se observă că amplitudinea se modifică în timp după ecuaţia:

$$A(t) = Ae^{-\delta t}\,. \tag{12}$$

Perioada acestei mişcări este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}} > T_0\,. \tag{13}$$

Caracteristicile oscilaţiilor amortizate:

- **Decrementul logaritmic** al amortizării:

$$\Delta = \ln\left[\frac{A(t)}{A(t+T)}\right] = \ln\left[\frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T)}}\right] = \ln\left[e^{\delta T}\right] = \delta T\,. \tag{14}$$

- **Timpul de relaxare** – este timpul în care amplitudinea scade de ***e*** ori:

$$A(t+\tau) = \frac{A(t)}{e}, \tag{15}$$

de unde:

$$Ae^{-\delta(t+\tau)} = \frac{Ae^{-\delta t}}{e} = Ae^{-\delta t - 1} \quad \Rightarrow \quad \delta\tau = 1\,, \tag{16}$$

iar timpul de relaxare, τ este:

$$\tau = \frac{1}{\delta}. \tag{17}$$

- Atenuarea este:

$$Q = \omega_0 \tau, \tag{18}$$

care este pozitivă ($Q > 0$) pentru o mişcare periodică şi este negativă ($Q < 0$) pentru o mişcare aperiodică.

8.2. Oscilaţii forţate (întreţinute). Rezonanţa

Pentru a menţine o mişcare oscilatorie cu amplitudine constantă, în cazul prezentei forţelor de frecare, este nevoie să se transmită periodic energie sistemului sub forma unei forţe care să compenseze amortizarea. Ea este de forma:

$$F = F_0 \, sin(\omega t), \tag{19}$$

mişcarea punctului material este descrisă de ecuaţia:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \, sin(\omega t), \tag{20}$$

sau:

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{F_0}{m} sin(\omega t), \tag{21}$$

soluţia acestei ecuaţii diferenţiale este suma a doua soluţii i) a ecuaţiei omogene şi ii) de forma membrului drept:

$$x = x_1 + x_2, \tag{22}$$

unde:

$$x_1(t) = Ae^{-\delta t} \, sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t + \varphi_0\right), \tag{23}$$

şi:

$$x_2(t) = A \, sin(\omega t + \varphi), \tag{24}$$

pentru un timp suficient de lung avem ca şi soluţie doar cea de forma termenului drept, pentru că soluţia ecuaţiei omogene tinde la zero:

$$x(t) = A \, sin(\omega t + \varphi), \tag{25}$$

viteza este:

$$\dot{x}(t) = \omega A \, cos(\omega t + \varphi), \tag{26}$$

iar acceleraţia este:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\, sin(\omega t + \varphi), \tag{27}$$

ecuaţia de mişcare devine:

$$-\omega^2 A\, sin(\omega t + \varphi) + 2\delta \cdot \omega A\, cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cdot A\, sin(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} sin(\omega t), \tag{28}$$

prin dezvoltarea funcţiilor *sinus* şi *cosinus* şi identificarea coeficienţilor obţinem:

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) cos\,\varphi - 2\delta\omega A\, sin\,\varphi = \dfrac{F_0}{m}, \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) sin\,\varphi + 2\delta\omega A\, cos\,\varphi = 0 \end{cases} \tag{29}$$

de unde amplitudinea A şi faza φ sunt:

$$\begin{cases} A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \\ tg\varphi = -\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases} \tag{30}$$

Amplitudinea mişcării atinge o valoare maximă pentru pulsaţia care respectă condiţia:

$$\frac{dA}{d\omega} = 0, \tag{30}$$

de unde:

$$\begin{matrix} -2\omega 2(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\delta^2\omega = 0 \\ \omega(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\delta^2) = 0 \end{matrix}, \tag{31}$$

care este adevărat pentru ω = 0 adică în absenta forţei perturbatoare sau pentru:

$$\begin{matrix} \omega_{rez}^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 \\ \omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \end{matrix}. \tag{32}$$

care este frecvenţa de rezonantă. Amplitudinea devine maximă având valoarea:

$$A_{rez} = \frac{F_0}{m\sqrt{4\delta^2(\omega_0^2 - \omega^2)}} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}. \tag{33}$$

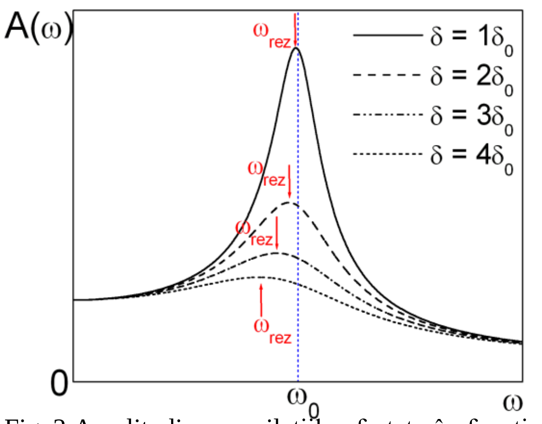

Fig. 2 Amplitudinea oscilaţiilor forţate în funcţie de pulsaţia acestora pentru diferite valori δ.

8.3 Compunerea oscilaţiilor

De cele mai multe ori corpurile nu sunt supuse unei singure forţe şi care să aibă ca efect o mişcare oscilatorie pură, fie aceasta amortizată sau forţată, având astfel o mişcare mult mai complexă. Când forţele care acţionează asupra corpurilor sunt de tip elastic mişcarea rezultată poate fi descrisă prin suprapunerea mişcărilor oscilatorii datorate fiecărei forţe. Acest lucru se numeşte, pe scurt, compunerea oscilaţiilor. Există câteva cazuri particulare care la o privire mai atentă pot sta la baza oricărei compuneri arbitrarii a oscilaţiilor. Aceste cazuri depind de direcţiile de oscilaţie relative a două mişcării oscilatorii, şi anume oscilaţii paralele şi oscilaţii perpendiculare, sau pot să depindă de frecvenţa acestor oscilaţii, conducând la oscilaţii de aceeaşi frecvenţă şi de frecvenţe diferite.

Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţe egale

Să consideram un punct din spaţiu, P în care se suprapun două oscilaţii armonice paralele, de aceeaşi frecventă, ν descrise de ecuaţiile de mişcare:

$$\begin{cases} y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}, \tag{34}$$

unde y_1, A_1, φ_1 sunt elongaţia, amplitudinea şi respectiv faza iniţială a mişcării oscilatorii a punctului P în absenta celei de-a doua oscilaţii, iar y_2, A_2, φ_2 sunt elongaţia, amplitudinea şi respectiv faza iniţială a mişcării oscilatorii a punctului P în absenţa primei oscilaţii. Mişcarea compusă rezultată este:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2), \tag{35}$$

este tot o mişcare oscilatorie descrisă de ecuaţia:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \tag{36}$$

Tot ce avem acum de făcut este să determinăm componentele mişcării rezultate, şi anume amplitudinea A_1, şi faza iniţială, φ a mişcării. Pentru aceasta, cel mai uşor este să considerăm diagrama fazorială a mişcării, unde mişcarea oscilatorie este considerată ca o proiecţie pe o axă, în cazul de fata y a unei mişcări circulare cu raza egală cu

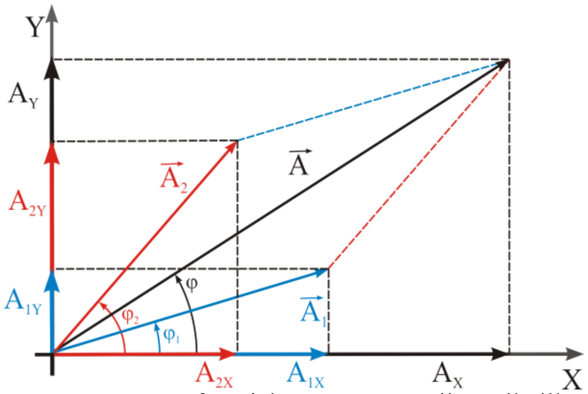

Fig. 3 Diagrama fazorială a compunerii oscilaţiilor paralele de aceeaşi frecvenţă.

amplitudinea, viteza circulară dată de pulsaţie iar faza iniţială fiind chiar unghiul iniţial. Amplitudinea se poate calcula uşor folosind ***teorema lui Pitagora generalizată***:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \tag{37}$$

iar:

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}, \tag{38}$$

faza iniţială a acesteia.

Exista doua cazuri particulare interesante care merita menţionate. Primul este acela când mişcările sunt în fază $(\varphi_1 = \varphi_2\,;\,\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0)$, iar amplitudinea este maximă:

$$A = A_1 + A_2, \tag{39}$$

şi al doilea caz în care cele două mişcări sunt în antifază $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$ $(\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi)$, iar amplitudinea este minimă:

$$A = A_1 - A_2. \tag{40}$$

Compunerea oscilaţiilor paralele de amplitudini egale şi frecvenţe diferite

Să considerăm un punct din spaţiu, P în care se suprapun două oscilaţii armonice paralele, de aceeaşi amplitudine, A şi frecvenţe diferite descrise de ecuaţiile de mişcare:

$$\begin{cases} y_1(t) = A\,sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y_2(t) = A\,sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}. \tag{41}$$

Ecuaţia de mişcare rezultată este dată de suma ecuaţiilor individuale:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A\sin(\omega_2 t + \varphi_2), \tag{42}$$

este tot o mişcare oscilatorie. Dacă se foloseşte o binecunoscuta formulă trigonometrică:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}, \tag{43}$$

ecuaţia de mişcare devine:

$$y(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 t + \varphi_1 - \omega_2 t - \varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1 t + \varphi_1 + \omega_2 t + \varphi_2}{2}\right), \tag{44}$$

şi care se mai poate rescrie:

$$y(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right), \tag{45}$$

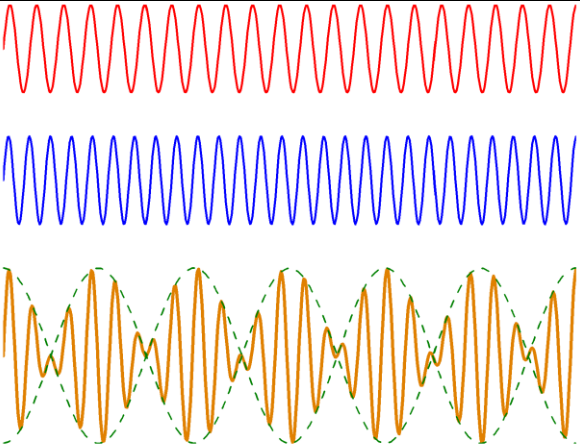

Fig. 4 Compunerea a două oscilaţii paralele cu amplitudini constante şi de frecvenţe diferite conduce la apariţia unei oscilaţii cu amplitudinea modulata cunoscut ca fenomen fizic numit *bătăi*.

care este ecuaţia unei mişcări oscilatorii cu amplitudinea rezultată dependentă de timp:

$$A(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right), \quad (46)$$

şi pulsaţia determinată de media pulsaţiilor celor două oscilaţii individuale:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (47)$$

Pentru uşurinţă, fără a schimba sensul celor ce urmează se pot considera fazele iniţiale a celor două mişcări ca fiind zero:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad (48)$$

iar ecuaţia de mişcare devine

$$y(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (49)$$

Se observa că în cazul în care cele 2 oscilaţii au aceeaşi pulsaţie se obţine rezultatul discutat la punctul anterior:

$$y(t) = 2A\sin(\omega t) \quad (50)$$

În cazul general în care pulsaţiile celor 2 oscilaţii diferă $\omega_1 \neq \omega_2$ amplitudinea rezultată trece prin maxime şi minime la diferite momente de timp. Astfel fenomenul de variaţie periodică a amplitudinii oscilaţiei rezultante poartă numele de ***bătăi***.

Compunerea oscilaţiilor perpendiculare de frecventa egală dar amplitudini diferite

Dacă consideram un punct P care efectuează oscilaţii sub acţiunea simultană a doua forţe elastice perpendiculare. Ecuaţiile de mişcare care descriu acum mişcarea corpului sunt date de expresiile:

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_x) \\ y(t) = B\sin(\omega t + \varphi_y) \end{cases}, \quad (51)$$

unde A şi B sunt amplitudinile celor 2 mişcării oscilatorii perpendiculare cu fazele, φ_x, şi φ_y. în acest caz scopul nu-l mai reprezintă determinarea ecuaţiei de mişcare, deoarece acestea sunt deja date de ecuaţia (5.77) ci determinarea traiectoriei punctului material în planul XOY. Pentru aceasta se împart cele două ecuaţii la amplitudinile corespunzătoare:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A} = \sin(\omega t + \varphi_x) \\ \dfrac{y}{B} = \sin(\omega t + \varphi_y) = \sin(\omega t + \varphi_x + \varphi_y - \varphi_x) = \sin(\omega t + \varphi_x + \Delta\varphi) \\ \quad = \sin(\omega t + \varphi_x)\cos(\Delta\varphi) + \cos(\omega t + \varphi_x)\sin(\Delta\varphi) \\ \quad = \dfrac{x}{A}\cos(\Delta\varphi) + \cos(\omega t + \varphi_x)\sin(\Delta\varphi) \end{cases}, \tag{52}$$

$$\begin{gathered} \frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos(\Delta\varphi) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_x)}\sin(\Delta\varphi)\Big|^2 \\ \frac{x^2}{A^2}\cos^2(\Delta\varphi) + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos(\Delta\varphi) = \left[1 - \frac{x^2}{A^2}\right]\sin^2(\Delta\varphi) \end{gathered}, \tag{53}$$

de unde în final se obţine ecuaţia generală a unei elipse:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi) \tag{54}$$

Dacă se scompun două oscilaţii perpendiculare cu frecvenţele care satisfac relaţiile $\nu_1/\nu_2 = N_1/N_2$ cu N_1 şi N_2 două numere naturale, atunci prin suprapunere iau naştere aşa numitele figuri Lissajous.

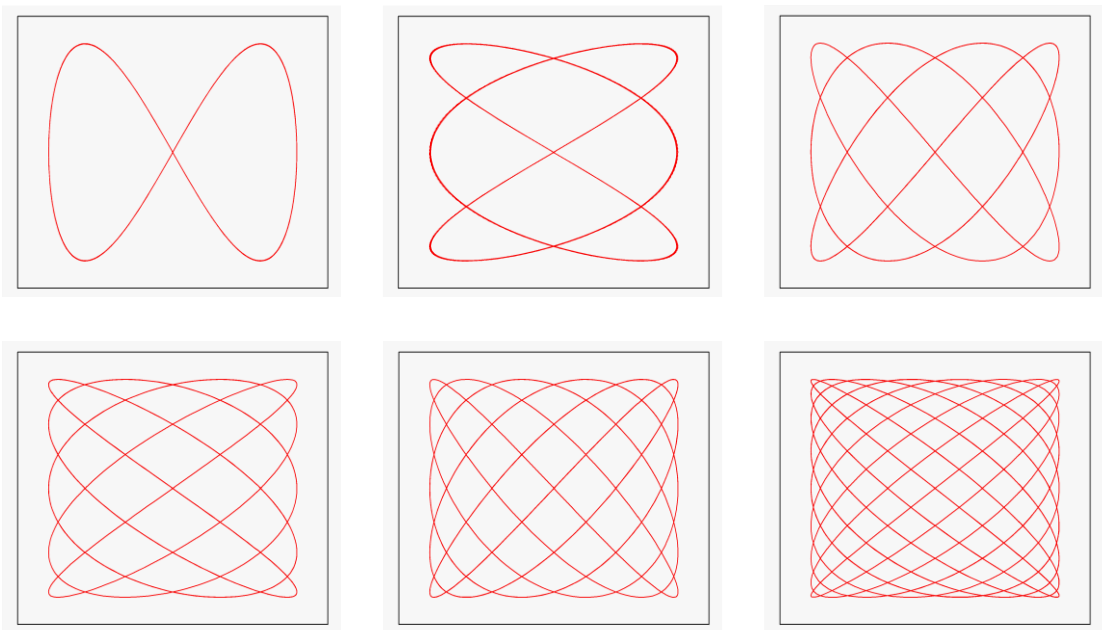

Fig. 5 Figurile Lissajous, obţinute din ecuaţia 54 si reprezintă compunerea a două oscilaţii perpendiculare cu amplitudini diferite şi raportul frecvenţelor dat de raportul a doua numere întregi.